Differentialrechnung: Steckbriefaufgaben – Lösung

Steckbrief-M1: Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3.ten Grades hat den Wendepunkt W(0|0) und den Hochpunkt H(2|2). Bestimme die ganzrationale Funktion und fertige eine Skizze an.

Ansatz: $f(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$

$f'(x) = 3\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c$
$f''(x) = 6\cdot a\cdot x + 2\cdot b$

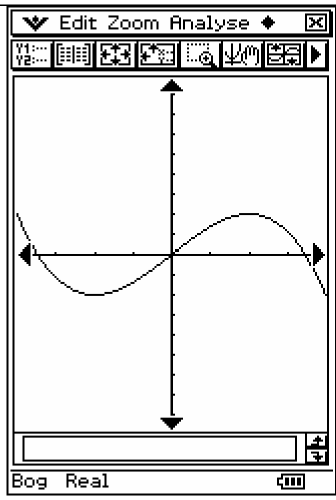
$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f''(0) &= 0 \\ f(2) &= 2 \\ f'(2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & d &=& 0 \\ (2) & 2\cdot b &=& 0 \\ (3) & 8\cdot a + 4\cdot b + 2\cdot c + d &=& 2 \\ (4) & 12\cdot a + 4\cdot b + c &=& 0 \end{array}$$

solve({d=0, 2b=0, 8a+4b+2c+d=2, 12a+4b+c=0},{a,b,c,d})

$\rightarrow \{a = -\frac{1}{8}\ , b = 0\ , c = \frac{3}{2}\ , d = 0\}$

Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{8}\cdot x^3 + \frac{3}{2}\cdot x$



Steckbrief-M2: Eine ganzrationalen Funktion 3.ten Grades hat im Punkt P(0|1) die Steigung $m_P= -1$; Ihr Wendepunkt ist W(–1 | 4). Bestimme die Gleichung dieser Funktion und fertige eine Skizze an.

Ansatz: $f(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$

$f'(x) = 3\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c$
$f''(x) = 6\cdot a\cdot x + 2\cdot b$

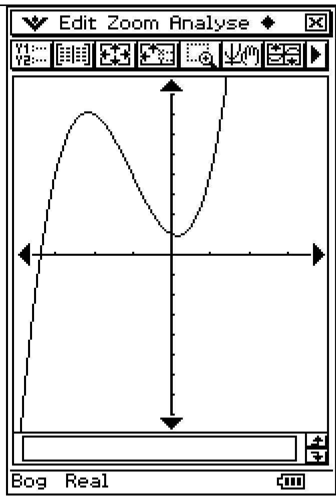
$$\begin{array}{lrcl} (1) & f(0) &=& 1 \\ (2) & f'(0) &=& -1 \\ (3) & f(-1) &=& 4 \\ (4) & f''(-1) &=& 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & d &=& 1 \\ (2) & c &=& -1 \\ (3) & -a + b - c + d &=& 4 \\ (4) & -6\cdot a + 2\cdot b &=& 0 \end{array}$$

solve({d=1, c=–1,–a+b–c+d=4, –6a+2b=0},{a,b,c,d})

$\rightarrow \{a = 1,\ b = 3\ , c = -1\ , d = 1\}$

Ergebnis: $f(x) = x^3 + 3\cdot x^2 - x + 1$



Steckbrief-M3: Bestimme a und b so, dass das Schaubild der Funktion f mit $f(x)=a\cdot x^4 + b\cdot x^2$ den Wendepunkt W(1 | –2,5) hat. Fertige eine Skizze an.

Ansatz: $f(x) = a\cdot x^4 + b\cdot x^2$

$f'(x) = 4\cdot a\cdot x^3 + 2\cdot b\cdot x$
$f''(x) = 12\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot b$

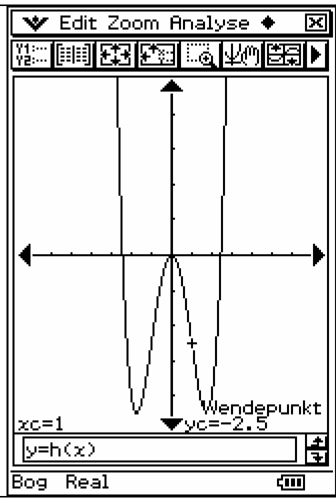
$$\begin{array}{lrcl} (1) & f(1) &=& -2{,}5 \\ (2) & f''(1) &=& 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & a + b &=& -2{,}5 \\ (2) & 12\cdot a + 2\cdot b &=& 0 \end{array}$$

solve({a+b =–2.5, 12a+2b=0},{a,b})

$\rightarrow \{a = \frac{1}{2},\ b = -3\}$

Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{2}\cdot x^4 - 3\cdot x^2$



Differentialrechnung: Steckbriefaufgaben –Lösung

Steckbrief-M4: Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 8. Grades mit folgenden Eigenschaften: Der Graph zu f ist symmetrisch zur y-Achse und verläuft durch den Punkt $P_0(0 \mid 8)$. Ferner hat der Graph in $P_1(-2 \mid 8)$ und $P_2(2 \mid 8)$ Extrempunkte. Zudem verläuft der Graph zu f durch die Punkte $P_3(-\sqrt{2} \mid 4)$ und $P_4(\sqrt{2} \mid 4)$ sowie durch die Punkte $P_5(-1 \mid 8)$ und $P_6(1 \mid 8)$.

Ansatz: $f(x) = a \cdot x^8 + b \cdot x^6 + c \cdot x^4 + d \cdot x^2 + e$

$f'(x) = 8 \cdot a \cdot x^7 + 6 \cdot b \cdot x^5 + 4 \cdot c \cdot x^3 + 2 \cdot d \cdot x$

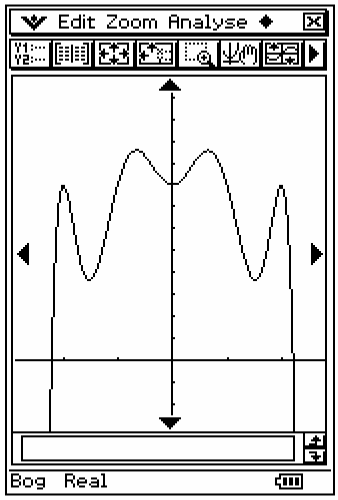
(1)	$f(0)$	=	8
(2)	$f(2)$	=	8
(3)	$f'(2)$	=	0
(4)	$f(\sqrt{2})$	=	4
(5)	$f(1)$	=	8

(1)	e	=	8
(2)	$a \cdot 256 + b \cdot 64 + c \cdot 16 + d \cdot 4 + 8$	=	8
(3)	$a \cdot 1024 + b \cdot 192 + c \cdot 32 + d \cdot 4$	=	0
(4)	$a \cdot 16 + b \cdot 8 + c \cdot 4 + d \cdot 2 + 8$	=	4
(5)	$a + b + c + d + 8$	=	8

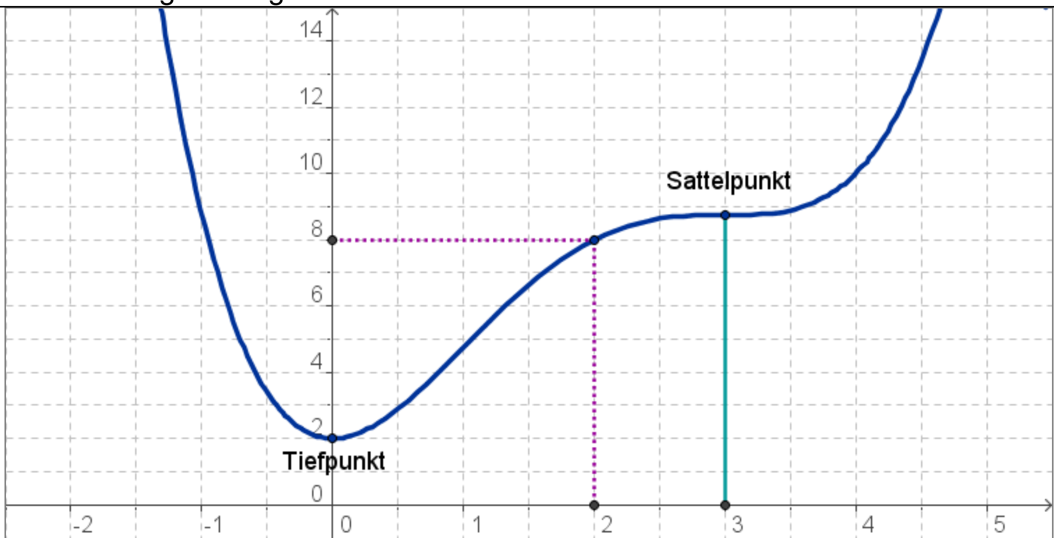
solve({e=8,256a+64b+16c+4d+8=8,1024a+192b+32c+4d=0,16a+8b+4c+2d+8=4,
a+b+c+d+8=8},{a,b,c,d,e})

$\rightarrow \{a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{9}{2},\ c = -12,\ d=8,\ e=8\}$

Lösung $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^8 + \frac{9}{2} \cdot x^6 - 12 \cdot x^4 + 8 \cdot x^2 + 8$



Steckbrief-G1: Wie lautet der Funktionsterm? (Vom Graph der Funktion auf die Funktion schließen)
Das nachfolgende Schaubild gibt den Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades wieder. Bestimme die Funktionsgleichung!



Ansatz: $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

(1)	$f(0)$	=	2
(2)	$f(2)$	=	8
(3)	$f'(0)$	=	0
(4)	$f'(3)$	=	0
(5)	$f''(3)$	=	0

(1)	e	=	2
(2)	$16a + 8b + 4c + 2d + e$	=	8
(3)	d	=	0
(4)	$108a + 27b + 6c + d$	=	0
(5)	$108a + 18b + 2c$	=	0

solve({e=2,16a+8b+4c+2d+e=8,d=0,108a+27b+6c+d=0,108a+18b+2c=0},{a,b,c,d,e})

$\rightarrow \{a = \frac{1}{4},\ b = -2,\ c = \frac{9}{2},\ d=0,\ e=2\}$

Lösung $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + \frac{9}{2} \cdot x^2 + 2$